

VARIEDADES E TENSORES

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

SUMÁRIO

1	Variedades	1
1.1	Definições	1
2	Fibrado tangente	1
2.1	Derivações como vetores tangentes	1
3	Campos vetoriais	1
3.1	Comutador de campos	2
4	Fibrado cotangente	3
4.1	Espaço vetorial dual	3

1 VARIEDADES

1.1 Definições

2 FIBRADO TANGENTE

2.1 Derivações como vetores tangentes

3 CAMPOS VETORIAIS

Na Sec. 2.1 nos vimos que o conjunto das derivações em um ponto p da variedade \mathcal{M} é isomórfico ao espaço dos vetores tangentes àquele mesmo ponto $T_p\mathcal{M}$. Vimos também que a união dos espaços tangentes

$$T\mathcal{M} = \cup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M} = \{ (p, v) \mid p \in \mathcal{M} \text{ and } v \in T_p\mathcal{M} \},$$

forma o que chamamos de fibrado tangente. Como cada espaço tangente é isomórfico a cada espaço das derivações em um ponto, podemos usar intercambiavelmente $D\mathcal{M}$ ou

\mathcal{TM} . Daqui em diante, vamos denotar sempre o fibrado tangente por \mathcal{TM} lembrando que podemos usar tanto o formalismo de derivações ou classes de equivalência para denotar um vetor.

3.1 DEFINIÇÃO. Chamamos de campo vetorial o mapa

$$v : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{TM}, \quad v(p) = v_p. \quad (1)$$

Essa é uma definição informal já que o lado direito não é um conjunto, mas um conjunto para cada elemento do domínio. Uma definição rigorosa seria feita em termos de seções transversais, contudo isso não será necessário por enquanto. Aqui adotaremos v_p como uma derivação em p , ou seja, $v_p : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Dada uma derivação v_p em um ponto p , vimos que ela pode ser escrita em termos de uma base definida por uma carta ϕ , ou seja,

$$v_p(f) = \left[v_p(x^\mu) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \right]_p f = v_p(x^\mu) \left(\frac{\partial f \circ \phi^{-1}(\mathbf{x})}{\partial u^\mu} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\phi(p)}. \quad (2)$$

Para simplificarmos nossa notação, vamos calcular nosso campo vetorial $v(p)$ em uma carta específica ϕ , nesse caso

$$\begin{aligned} v_{\mathbf{x}}(f) &\equiv v_{\phi^{-1}(\mathbf{x})}(f), \\ &= v_{\mathbf{x}}(x^\mu) \frac{\partial f \circ \phi^{-1}(\mathbf{x})}{\partial u^\mu} = v^\mu(\mathbf{x}) \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x^\mu}, \\ F(\mathbf{x}) &\equiv f \circ \phi^{-1}(\mathbf{x}), \quad v^\mu(\mathbf{x}) \equiv v_{\mathbf{x}}(x^\mu). \end{aligned} \quad (3)$$

Na expressão acima, nós definimos o representante local da função da variedade f como F . Quando não há ambiguidade em relação a carta que usamos (quando estamos usando somente uma carta), a derivada parcial pode ainda ser escrita como

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (4)$$

Ou seja, quando representado em uma carta podemos escrever um campo vetorial da forma

$$v = v^\mu(\mathbf{x}) \partial_\mu = v^\mu \partial_\mu. \quad (5)$$

Na última igualdade, supondo que não há ambiguidade em relação ao ponto na carta que estamos usando, omitimos também o argumento. Na prática, muitos textos simplificam ainda mais e não incluem as derivadas parciais ∂_μ e chamam v^μ de vetor.

3.1 Comutador de campos

Sabemos agora que um campo vetorial v leva um elemento de $C^\infty(\mathcal{M})$ em outra função da variedade, ou seja, $v : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$. Portanto, é natural que perguntemos, será que dados dois campos vetoriais v e u , a composição $u(v(\cdot))$ é também uma derivação?

Aplicando a um representante local F temos,

$$u(v(F)) = u^\mu \partial_\mu (v^\nu \partial_\nu F) = (u^\mu \partial_\mu v^\nu) \partial_\nu F + v^\nu u^\mu \partial_\mu \partial_\nu F. \quad (6)$$

Para ser uma derivação precisamos que a ação dessa composição no produto de funções FG satisfaça a regra de Leibniz,

$$u(v(FG)) = (u^\mu \partial_\mu v^\nu) \partial_\nu (FG) + v^\nu u^\mu \partial_\mu \partial_\nu (FG), \quad (7)$$

$$= Gu(v(F)) + Fu(v(G)) + v^\nu u^\mu (\partial_\mu F)(\partial_\nu G) + v^\nu u^\mu (\partial_\mu G)(\partial_\nu F). \quad (8)$$

A última expressão acima mostra que temos os termos que esperamos pela regra de Leibniz, porém existem dois termos extras. Por isso, a composição de dois campos vetoriais não é um campo vetorial. Agora, note que os termos extras são simétricos sobre a troca de v e u , por isso, se tomarmos a aplicação antissimétrica desses dois campos, teremos um (possivelmente) novo campo vetorial, isto é,

$$[u, v](FG) = G[u, v](F) + F[u, v](G), \quad [u, v](\cdot) \equiv u(v(\cdot)) - v(u(\cdot)). \quad (9)$$

Chamamos o novo campo vetorial $[u, v]$ resultante da composição antissimétrica de u e v de comutador dos campos, é fácil ver que as componentes que sobram são,

$$[u, v] = (u^\mu \partial_\mu v^\nu - v^\mu \partial_\mu u^\nu) \partial_\nu. \quad (10)$$

Com isso, mostramos que os campos vetoriais (quando escritos em termos de derivações) tem naturalmente uma álgebra de Lie (caracterizada por esse produto antissimétrico, que satisfaz a identidade de Jacobi). Esse produto tem inúmeras aplicações, vamos mostrar mais a frente que ele está ligado a um conceito de derivada, chamada derivada de Lie, essa derivada é bastante útil quando queremos escrever equações de movimento já que ela se reduz a derivada parcial normal quando usamos um sistema de coordenadas adaptado.

4 FIBRADO COTANGENTE

Todo espaço vetorial tem associado um conceito natural de espaço dual, dessa forma podemos definir um espaço dual a cada $T_p\mathcal{M}$, e de forma similar a $T\mathcal{M}$ podemos definir um fibrado cotangente.

4.1 Espaço vetorial dual

4.1 DEFINIÇÃO. Dado um espaço vetorial \mathbb{V} chamamos de espaço dual \mathbb{V}^* o espaço dos funcionais lineares que mapeiam $v \in \mathbb{V}$ em reais. Dessa forma se $l \in \mathbb{V}^*$ então $l(v) \in \mathbb{R}$. É fácil ver que esse espaço tem uma estrutura natural de espaço vetorial,

$$(l + m)(v) \equiv l(v) + m(v), \quad l, m \in \mathbb{V}^*, \quad (11)$$

$$(al)(v) \equiv a(l(v)), \quad a \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

LISTA DE EXERCÍCIOS

Note que novamente usamos a soma e multiplicação dos reais para definir a soma dos vetores.

Como sabemos, um vetor qualquer $v \in \mathbb{V}$ pode sempre ser escrito em termos de uma base $e_\mu \in \mathbb{V}$, i.e., $v = v^\mu e_\mu$ e $v^\mu \in \mathbb{R}$. Dessa forma, para calcular a aplicação de um funcional linear basta sabermos sua aplicação na base, isto é,

$$l(v) = v^\mu l(e_\mu). \quad (13)$$

A expressão acima mostra que o resultado da aplicação de um funcional linear em um vetor é dado pela soma das componentes de v e as quantidades $l(e_\mu)$. Isso mostra também que o funcional l é totalmente definido pelas quantidades $l(e_\mu)$ e consequentemente tem a mesma dimensão de \mathbb{V} .

Dada uma base $e_\mu \in \mathbb{V}$ podemos definir uma base em \mathbb{V}^* usando a expressão $e^\nu(e_\mu) = \delta_\mu^\nu$ onde $e^\nu \in \mathbb{V}^*$. Note que para um ν fixo, essa expressão nos permite calcular as componentes de e^ν nessa base, o que define totalmente esse funcional.

LISTA DE EXERCÍCIOS