MECÂNICA QUÂNTICA II – ADIÇÃO DE MOMENTO ANGULAR, MÉTODOS DE APROXIMAÇÕES

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

1. Considere o espaço produto de dois espaços vetoriais de spin-1/2, ou seja, $\mathbb{V} = \mathbb{V}_{1/2} \otimes \mathbb{V}_{1/2}$. Resolva as seguintes questões:

   (a) Construa o operador momento angular total para $\mathbb{V}$ a partir dos operadores $\hat{\mathbf{J}}_1$ e $\hat{\mathbf{J}}_2$, onde $\hat{\mathbf{J}}_1$ e $\hat{\mathbf{J}}_2$ são os operadores de momento angular nos espaços $\mathbb{V}_{1/2}$.

   (b) Mostre que os estados produto $|\pm\pm\rangle$ são autoestados do operador $\hat{J}_z$.

   (c) Determine as combinações lineares dos estados $|\pm\pm\rangle$ que formam autoestados de $\hat{J}^2$ e obtenha os respectivos autovalores.

   (d) Mostre que o espaço $\mathbb{V}$ se decompõe em uma soma direta de representações irredutíveis. Quais representações fazem parte dessa decomposição?

2. Princípio Variacional. O valor esperado do Hamiltoniano $\hat{H}$ em um estado arbitrário $|\psi\rangle$ no espaço $\mathbb{V}$ satisfaz a desigualdade

$$E[\psi] \equiv \frac{\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \geq E_0,$$

   onde E_0 é o menor autovalor de $\hat{H}$. Resolva as seguintes questões:

   (a) Demonstre a desigualdade acima.

   (b) Podemos aproximar o autoestado fundamental $|E_0\rangle$ minimizando $E[\psi_\alpha]$ sobre um conjunto restrito de funções de onda parametrizadas. Considere o Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \lambda\hat{x}^4$$

   e o estado de teste

$$\langle x|\psi_\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2}\right).$$

   Mostre que o valor esperado da energia é dado por

$$E[\psi_\alpha] = \frac{\hbar^2\alpha}{4m} + \frac{3\lambda}{4\alpha^2}.$$

(c) Determine o valor de α que minimiza $E[\psi_\alpha]$ e mostre que

$$\alpha = \left(\frac{6m\lambda}{\hbar^2}\right)^{1/3}.$$

(d) Discuta a validade da aproximação e como ele pode ser melhorada e testada.

3. Aproximação WKB. Considere uma partícula de massa m sujeita a um potencial unidimensional $V(x)$ que varia lentamente. A equação de Schrödinger independente do tempo é dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi.$$

Para $E > V(x)$, a aproximação WKB assume que a função de onda pode ser escrita como

$$\psi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\exp\left(\pm\frac{i}{\hbar}\int^{x} p(x')dx'\right),$$

onde $p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))}$ é o momento clássico da partícula. Substitua a ansatz WKB na equação de Schrödinger e derive a condição de validade da aproximação WKB. Discuta o seu significado físico.

4. Teoria de Perturbação Dependente do Tempo. Considere um sistema quântico descrito por um Hamiltoniano $\hat{H}(t)$ da forma

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \lambda\hat{V}(t),$$

onde $\hat{H}_0$ possui autovalores e autoestados conhecidos, ou seja,

$$\hat{H}_0\left|n^0\right\rangle = E_n^0\left|n^0\right\rangle.$$

Assumimos que no instante inicial $t = t_0$ o sistema está em um dos autoestados de $\hat{H}_0$, e buscamos a evolução do estado para $t > t_0$. Resolva as seguintes questões:

(a) Considere a seguinte expansão para o estado do sistema na base dos autoestados de $\hat{H}_0$:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n d_n(t)e^{-iE_n^0 t/\hbar}\left|n^0\right\rangle.$$

Mostre que, ao inserir essa expressão na equação de Schrödinger, obtemos a equação para os coeficientes $d_n(t)$:

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}d_n}{\mathrm{d}t} = \sum_m e^{i\omega_{nm}t}V_{nm}(t)d_m(t),$$

onde $\omega_{nm} = (E_n^0 - E_m^0)/\hbar$ e $V_{nm}(t) = \langle n^0|\hat{V}(t)|m^0\rangle$.

(b) Assuma agora que a perturbação é fraca, isto é, $d_n(t)$ pode ser expandido em potências de λ. Escreva explicitamente a equação diferencial na aproximação de primeira ordem em λ.