

PROVA DE FÍSICA MATEMÁTICA II – ÁTOMO DE HIDROGÊNIO

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

1. Átomo de Hidrogênio. Conceitos a Hamiltoniana representando a interação eletrostática entre o elétron e o próton. A equação de autovalores de energia e autoestados de energia é dada por:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \psi_\alpha = E_\alpha \psi_\alpha, \quad (1)$$

onde m é a massa do elétron, e é a carga do elétron, r é a distância entre o elétron e o próton, ψ é a função de onda do elétron e E é a energia do elétron. Usando coordenadas esféricas, aplique o método de separação de variáveis para resolver a equação de autovalores de energia e autoestados de energia.

- (a) Faça a separação de variáveis $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$. Mostre que a parte angular $Y(\theta, \phi)$ pode ser escrita como harmônicos esféricos fazendo a separação em ϕ e em θ . Discuta os rótulos l e m associados aos harmônicos esféricos. Explique e discuta quais são os possíveis valores.
- (b) Usando a separação de variáveis, mostre que a parte radial $R(r)$ da função de onda do elétron satisfaz a equação diferencial radial:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0. \quad (2)$$

- (c) Identifique as escalas físicas relevantes para a equação acima e reescreva a equação em termos adimensionais.
- (d) Estude o limite assintótico em r da equação radial. Discuta as soluções para $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$. Discuta a relação entre o limite assintótico e a condição de normalização da função de onda. Discuta também a relação do limite com o sinal da energia.
- (e) Especialize a equação radial para o caso convergente. Encontre as soluções que satisfazem a condição de normalização. Aplique o método de Frobenius para encontrar a solução geral da equação radial. Mostre e discuta os valores da energia permitidos.