Universidade Estadual de Londrina

FÍSICA MATEMÁTICA II – DELTA DE DIRAC E FUNÇÕES DE GREEN

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

---

1. Considere a distribuição normal $p_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2}$, onde $\sigma > 0$ é o desvio padrão.

   (a) Mostre que a distribuição é normalizada, i.e,

   $$\int_{-\infty}^{\infty} p_\sigma(x)\mathrm{d}x = 1. \tag{1}$$

   (b) Mostre que a integral tem o seguinte limite

   $$\lim_{\sigma\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)p_\sigma(x)\mathrm{d}x = f(0).$$

   Ou seja, mostre que o limite da distribuição normal quando $\sigma \to 0$ é a função delta de Dirac.

2. Podemos construir a inversa da derivada de uma função $f(x)$ onde $x \in (a, b)$ como

   $$f(x) = \int_a^x f'(y)\mathrm{d}y, \qquad f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(y)\mathrm{d}y. \tag{2}$$

   onde $f(a) = 0 = f(b)$.

   (a) Mostre que podemos reescrever as expressões acima usando a função de Heaviside $\theta(x)$, i.e,

   $$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

   Ou seja, a função de Heaviside é a função de Green para a derivada.

(b) Calcule a integral da função de Heaviside, i.e,

$$G(x) \equiv \int_a^x \theta(y)\mathrm{d}y. \tag{4}$$

e mostre que a integral da função de Heaviside é a função de Green para a o operador derivada segunda:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\int_a^b G(x-y)f(y)\mathrm{d}y = f(x).$$

(c) Mostre também a relação inversa, i.e,

$$f(x) = \int_a^b G(x-y)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}f(y)\mathrm{d}y. \tag{5}$$

(d) Escreva a função de Green em termos da distância $\sigma(x,y) = |x-y|$.

3. Função de Green do Laplaciano:

(a) Mostre que o Laplaciano em três dimensões, i.e.,

$$\boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

atuando sobre $1/\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ é zero para todo $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, i.e.,

$$\boldsymbol{\nabla}^2\frac{1}{\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} = 0.$$

(b) Regularize a função $1/\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ usando o parâmetro $\varepsilon > 0$, i.e,

$$G_\varepsilon(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2+\varepsilon^2}}.$$

Mostre que a integral do Laplaciano da função regularizada é um, i.e,

$$\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{\nabla}^2 G_\varepsilon(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} = 1.$$

4. Faça a dedução das identidades de Green para o Laplaciano.

(a) Deduza as identidades de Green:

$$\oint_{\partial\Omega} \phi\boldsymbol{\nabla}\psi \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi + \phi\boldsymbol{\nabla}^2\psi\right) \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}, \tag{6}$$

$$\oint_{\partial\Omega} (\phi\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\phi) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\Omega} \left(\phi\boldsymbol{\nabla}^2\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}^2\phi\right) \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}. \tag{7}$$

onde Ω é um volume limitado por uma superfície $\partial\Omega$.

(b) Mostre como combinar a segunda identidade de Green com a função de Green do Laplaciano para obter a solução da equação de Poisson.