FÍSICA MATEMÁTICA II – DELTA DE DIRAC E FUNÇÕES DE GREEN

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

1. Podemos construir a inversa da derivada de uma função $f(x)$ onde $x \in (a,b)$ como

$$f(x) = \int_a^x f'(y)\mathrm{d}y, \qquad f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(y)\mathrm{d}y. \tag{1}$$

onde $f(a) = 0 = f(b)$.

(a) Mostre que podemos reescrever as expressões acima usando a função de Heaviside $\theta(x)$, i.e,

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Ou seja, a função de Heaviside é a função de Green para a derivada.

(b) Calcule a integral da função de Heaviside, i.e,

$$G(x) \equiv \int_a^x \theta(y)\mathrm{d}y. \tag{3}$$

e mostre que a integral da função de Heaviside é a função de Green para a o operador derivada segunda:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\int_a^b G(x-y)f(y)\mathrm{d}y = f(x).$$

(c) Mostre também a relação inversa, i.e,

$$f(x) = \int_a^b G(x-y)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}f(y)\mathrm{d}y. \tag{4}$$

(d) Escreva a função de Green em termos da distância $\sigma(x,y) = |x-y|$.

2. Funções de Green Unidimensionais.

   (a) Deduza as identidades de Green unidimensionais para o operador diferencial $\hat{L} = -\frac{d^2}{dx^2}$ no intervalo (a, b) para uma classe de funções que satisfaça $f(a) = 0 = f(b)$. Para isso, use a relação

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\phi\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} + \phi\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2},$$

   para encontrar os equivalentes unidimensionais de

   $$\oint_{\partial\Omega} \phi\boldsymbol{\nabla}\psi \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi + \phi\boldsymbol{\nabla}^2\psi\right) \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}, \tag{5}$$

   $$\oint_{\partial\Omega} (\phi\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\phi) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\Omega} \left(\phi\boldsymbol{\nabla}^2\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}^2\phi\right) \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}. \tag{6}$$

   (b) Usando a questão anterior, mostre que a função de Green para o operador em questão é

   $$G(x - y) = \frac{|x - y|}{2} + \alpha(x - y) + \beta.$$

   (c) Para achar α e β, use a condição de contorno $G(x - y) = 0$ para $x = a$, $x = b$, $y > a$ e $y < b$. Encontre as funções $\alpha(y)$ e $\beta(y)$.

   (d) Usando a função de Green, mostre que a solução da equação diferencial $-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x) = 1$ é $f(x) = -(x - a)(x - b)$.