Universidade Estadual de Londrina

FÍSICA MATEMÁTICA II – DELTA DE DIRAC E FUNÇÕES DE GREEN

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

---

1. Considere a distribuição normal $p_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2}$, onde $\sigma > 0$ é o desvio padrão.

   (a) Mostre que a distribuição é normalizada, i.e,
   $$\int_{-\infty}^{\infty} p_\sigma(x)\mathrm{d}x = 1. \tag{1}$$

   (b) Calcule a média e o valor esperado das potências impares de x, i.e,
   $$\left\langle x^{2n+1}\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} p_\sigma(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

   (c) Calcule a média e o valor esperado das potências pares de x, i.e,
   $$\left\langle x^{2n}\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} p_\sigma(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

   (d) Usando os resultados anteriores, mostre que a integral
   $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)p_\sigma(x)\mathrm{d}x = f(0) + \frac{\sigma^2}{2} f''(0) + \frac{\sigma^4}{8} f^{(4)}(0) + \dots.$$
   Onde $'$ denota a derivada em relação a x. Ou seja, mostre que o limite da distribuição normal quando $\sigma \to 0$ é a função delta de Dirac.

2. No caso de uma dimensão, a função de Green para o operador derivada segunda é proporcional a função distância $\sigma(x, y) = |x - y|$. Em três dimensões, a função de Green também pode ser escrita em termos da distância
   $$\sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2},$$

onde $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

(a) Mostre que o Laplaciano em três dimensões, i.e.,

$$\boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

atuando sobre $1/\sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ é zero para todo $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, i.e.,

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \frac{1}{\sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} = 0.$$

(b) Regularize a função $1/\sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ usando o parâmetro $\varepsilon > 0$, i.e,

$$G_\varepsilon(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + \varepsilon^2}}.$$

Mostre que a integral do Laplaciano da função regularizada é um, i.e,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{\nabla}^2 G_\varepsilon(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} = 1.$$