

PROVA DE FÍSICA MATEMÁTICA II – EDO

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

1. Considere a equação diferencial linear de segunda ordem:

$$y'' + P_1(x)y' + P_0(x)y = 0.$$

Suponha que x_0 é um ponto singular regular. Podemos reescrever a equação na forma:

$$y'' + \frac{p(x)}{(x - x_0)}y' + \frac{q(x)}{(x - x_0)^2}y = 0,$$

onde $p(x) = (x - x_0)P_1(x)$ e $q(x) = (x - x_0)^2P_0(x)$ são funções analíticas em $x = x_0$. Com isso:

- Determine o polinômio indicial e suas raízes a partir da forma de Frobenius.
 - Encontre a solução geral para a série de potências e derive a fórmula de recorrência.
 - Explique como o procedimento acima demonstra que sempre há pelo menos uma solução na forma de Frobenius.
2. Considere a equação de Bessel:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

- Classifique o ponto $x_0 = 0$ e encontre a primeira solução usando o método de Frobenius.
 - Encontre a segunda solução no caso $\nu = 2$.
3. Considere a equação de Legendre:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda + 1)y = 0,$$

definida para $x \in [-1, 1]$. Resolva a equação em $x_0 = 1$ usando o método de Frobenius e encontre duas soluções linearmente independentes. Em seguida:

- O que ocorre nos pontos singulares regulares se λ não for um número inteiro?

- (b) Quais são as condições sobre λ para garantir que as soluções sejam finitas em $x \in [-1, 1]$?