

PROVA DE FÍSICA MATEMÁTICA II – EDO E EDP

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

1. Considere o problema de auto-valor para o átomo de Hidrogênio abaixo e resolva as questões abaixo.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_\alpha - \frac{e^2 \psi_\alpha}{4\pi\epsilon_0|x|} = E_\alpha \psi_\alpha. \quad (1)$$

- (a) Faça a separação de variáveis e identifique as constantes de separação.
- (b) Explique quais são as restrições sobre as constantes de separação e discuta quais são suas origens geométricas e/ou físicas.
- (c) Se nos restringirmos a soluções concentradas (que vão a zero no infinito) quais são os valores possíveis para E_α .
- (d) Escreva a equação para a parte radial. Identifique as duas constantes com unidade de comprimento e explique a quais características do problema elas estão associadas.

2. Dada a formula de Rodrigues para os polinômios de Legendre:

$$P_\ell(x) = \frac{1}{\ell! 2^\ell} \frac{d^\ell}{dx^\ell} \left[(x^2 - 1)^\ell \right]. \quad (2)$$

Calcule a norma dos polinômios usando a definição de norma:

$$|P_\ell| \equiv \sqrt{\langle P_\ell | P_\ell \rangle}, \quad \langle P_\ell | P_{\ell'} \rangle \equiv \int_{-1}^1 P_\ell(x) P_{\ell'}(x) dx. \quad (3)$$

3. Usando a formula dos Harmônicos esféricos e a formula de Rodrigues para os

polinômios associados de Legendre:

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (4)$$

$$P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2 - 1)^\ell. \quad (5)$$

Calcule explicitamente todos os Harmônicos até $\ell = 2$ e mostre como eles podem ser escritos em termos das componentes (n^1, n^2, n^3) do vetor

$$\hat{n} = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3. \quad (6)$$