Universidade Estadual de Londrina

RELATIVIDADE RESTRITA – PROVA: FUNÇÕES DE GREEN E ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

1. Bivetores e Boosts

   (a) Calcule o quadrado dos seguintes bivetores e classifique cada um como tipo-tempo, tipo-espaço ou nulo:

   $$(\mathrm{e}^0 \wedge \mathrm{e}^1)^2, \quad (\mathrm{e}^1 \wedge \mathrm{e}^2)^2, \quad (\mathrm{e}^0 \wedge \mathrm{e}^2)^2.$$

   (b) Considere o bivetor $\mathrm{B} = \mathrm{e}^0 \wedge \mathrm{e}^1$ e o rotor $\mathrm{R} = e^{\eta \mathrm{B}/2}$, com parâmetro de rapidez η. Mostre que a transformação

   $$u \mapsto \mathrm{R} u \mathrm{R}^{\mathrm{T}},$$

   onde $\mathrm{R}^{\mathrm{T}} = e^{-\eta \mathrm{B}/2}$, corresponde a um boost de Lorentz ao longo da direção x^1 para um vetor qualquer $u = u^\mu \mathrm{e}_\mu$. Interprete o resultado.

   (c) Mostre que se $\mathrm{B} = \mathrm{e}^1 \wedge \mathrm{e}^2$ e $\mathrm{R} = e^{\theta \mathrm{B}/2}$, então

   $$u \mapsto \mathrm{R} u \mathrm{R}^{\mathrm{T}}$$

   corresponde a uma rotação de θ radianos em torno do eixo e^3.

2. Pseudoscalar e Dualidade

   (a) Mostre que o pseudoscalar $\mathrm{I} = \mathrm{e}^0 \wedge \mathrm{e}^1 \wedge \mathrm{e}^2 \wedge \mathrm{e}^3$ anti-comuta com cada vetor base, ou seja,

   $$\mathrm{I}\mathrm{e}^\mu = -\mathrm{e}^\mu \mathrm{I}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

   (b) Usando o pseudoscalar, calcule o dual do bivetor $\mathrm{B} = \mathrm{e}^1 \wedge \mathrm{e}^2$ ou seja IB e interprete o significado geométrico desse dual.

3. Projeções e Componentes Temporais

   (a) Mostre que a componente temporal de $x = x^\mu \mathrm{e}_\mu$ em relação a $w = \mathrm{e}_0$ pode ser recuperada por

   $$ct = -x \cdot w.$$

(b) Defina a projeção espacial ortogonal a w por

$$x_\perp = \frac{x + wxw}{2}$$

e prove que

$$x_\perp \cdot w = 0, \qquad \text{e} \quad wx_\perp = -x_\perp w.$$

4. Equação da Onda e Função de Green

(a) Defina a função de Green $G(t, \boldsymbol{x}; t', \boldsymbol{x}')$ associada à equação da onda

$$\Box\phi(t, \boldsymbol{x}) = \rho(t, \boldsymbol{x}),$$

onde

$$\Box = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2,$$

e explique sua interpretação física, destacando as condições de causalidade para as funções de Green retardada e avançada.

(b) A função de Green retardada em 3 dimensões espaciais pode ser expressa como

$$G_{\text{ret}}(ct - ct', \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = \frac{\delta\left(ct - ct' - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|\right)}{4\pi|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}.$$

Explique o significado físico do suporte desta função estar limitado à superfície do cone de luz.

(c) Calcule

$$\phi(t, \boldsymbol{x}) = \int G_{\text{ret}}(t, \boldsymbol{x}; t', \boldsymbol{x}')\, \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\, dt'd^3\boldsymbol{x}',$$

e explique o significado físico desse resultado.