

PROVA DE FÍSICA MATEMÁTICA II – FUNÇÕES DE GREEN

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

1. Considere

$$p_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

a distribuição normal.

(a) Mostre que $p_{\sigma}(x)$ é normalizada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{\sigma}(x) dx = 1.$$

(b) Calcule o valor esperado das potências ímpares:

$$\langle x^{2n+1} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} p_{\sigma}(x) dx.$$

(c) Mostre que para uma função suave $f(x)$, vale o desenvolvimento:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_{\sigma}(x) dx = f(0) + \frac{\sigma^2}{2} f''(0) + \frac{\sigma^4}{8} f^{(4)}(0) + \dots$$

O que isso implica no limite $\sigma \rightarrow 0$?

2. Considere o operador $\hat{L} = -\frac{d^2}{dx^2}$ definido no intervalo (a, b) , com condições de contorno homogêneas $\phi(a) = \phi(b) = 0$.

(a) Mostre que:

$$\int_a^b \left[\phi(x) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) - \psi(x) \frac{d^2 \phi}{dx^2}(x) \right] dx = 0$$

e explique como essa identidade pode ser obtida a partir de uma integração por partes adequada.

- (b) Usando agora que $\psi(x) = G(x, y) = |x - y|/2 + \alpha(x - y) + \beta$ é a função de Green do operador. Use a identidade acima para obter a solução formal da equação

$$-\frac{d^2}{dx^2} f(x) = s(x)$$

com condições de contorno homogêneas $G(a, y) = G(b, y) = 0$, na forma:

$$f(x) = \int_a^b G(x, y) s(y) dy.$$

3. Considere a distância $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ em \mathbb{R}^3 .

- (a) Mostre que o Laplaciano satisfaz:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) = 0 \quad \text{para } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

- (b) Regularize a função de Green como

$$G_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + \epsilon^2}},$$

e mostre que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 G_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d^3 \mathbf{x} = 1.$$

4. A função de Green do operador de ondas satisfaz:

$$\square G(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(t - t') \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

- (a) Escreva a representação de Fourier da função de Green e derive a expressão de $\tilde{G}(\omega, \mathbf{k})$.
 (b) Resolva a integral para a **função de Green retardada** no plano ω usando integração por contorno. Qual condição o contorno deve satisfazer?
 (c) Usando o resultado, mostre que

$$G_{\text{ret}}(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$

Interprete o suporte dessa função e sua conexão com a causalidade.