

MECÂNICA QUÂNTICA II – MOMENTO ANGULAR, ÁLGEBRA DE LIE E SPIN

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

1. Considere os operadores de momento angular em mecânica quântica e responda às questões abaixo:

- Defina os operadores de momento angular \hat{L}_x , \hat{L}_y e \hat{L}_z em termos dos operadores de posição \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} e momento \hat{p}_x , \hat{p}_y , \hat{p}_z .
- Mostre que os operadores de momento angular satisfazem a relação de comutação:

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{L}_k,$$

onde ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita.

- Explique o significado físico das relações de comutação acima e como elas estão relacionadas à álgebra de Lie do grupo de rotações $SO(3)$.
2. Considere a álgebra de Lie associada a um grupo de rotações generalizado, cujos geradores são denotados por \hat{J}_x , \hat{J}_y e \hat{J}_z :

- Mostre que os geradores \hat{J}_i satisfazem a mesma relação de comutação:

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{J}_k.$$

- Explique que, ao contrário dos operadores de momento angular orbital \hat{L}_i , os geradores \hat{J}_i não estão necessariamente associados a coordenadas espaciais, mas podem representar transformações mais gerais em um espaço abstrato.
 - Defina o operador $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$ e mostre que ele comuta com cada um dos geradores \hat{J}_i .
 - Explique que estamos agora procurando representações arbitrárias da álgebra de Lie, que podem descrever sistemas físicos além do momento angular orbital, como o spin.
3. Considere as representações irredutíveis da álgebra de Lie generalizada:

- (a) Defina os operadores escada \hat{J}_+ e \hat{J}_- como:

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y, \quad \hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y.$$

Mostre que esses operadores satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] = \pm\hbar\hat{J}_\pm, \quad [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hbar\hat{J}_z.$$

- (b) Considere um autoestado $|\lambda, m\rangle$ de $\hat{\mathbf{J}}^2$ e \hat{J}_z , tal que:

$$\hat{\mathbf{J}}^2 |\lambda, m\rangle = \lambda |\lambda, m\rangle, \quad \hat{J}_z |\lambda, m\rangle = m\hbar |\lambda, m\rangle.$$

Usando os operadores escada, mostre que:

$$\hat{J}_z(\hat{J}_\pm |\lambda, m\rangle) = (m \pm 1)\hbar(\hat{J}_\pm |\lambda, m\rangle).$$

Conclua que \hat{J}_\pm atuam como operadores de levantamento e abaixamento, aumentando ou diminuindo o valor de m em uma unidade de \hbar .

- (c) Mostre que os autovalores de $\hat{\mathbf{J}}^2$ e \hat{J}_z são limitados. Para isso, use a relação:

$$\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_z^2 + \frac{1}{2}(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+).$$

Demonstre que:

$$\lambda \geq m^2\hbar^2.$$

Conclua que existe um valor máximo m_{\max} e um valor mínimo m_{\min} para m , tais que:

$$\hat{J}_+ |\lambda, m_{\max}\rangle = 0, \quad \hat{J}_- |\lambda, m_{\min}\rangle = 0.$$

- (d) Usando as relações acima, mostre que os autovalores de $\hat{\mathbf{J}}^2$ são dados por:

$$\lambda = \hbar^2 j(j+1),$$

onde j é um número inteiro ou semi-inteiro, e m assume valores no intervalo $-j \leq m \leq j$.

- (e) Defina os estados $|j, m\rangle$ como autoestados simultâneos de $\hat{\mathbf{J}}^2$ e \hat{J}_z , com autovalores $\hbar^2 j(j+1)$ e $m\hbar$, respectivamente. Mostre que a dimensão da representação irredutível é $2j+1$.
- (f) Discuta como os valores de j e m estão relacionados à estrutura da álgebra de Lie e às representações irredutíveis do grupo de rotações $SO(3)$. Explique por que j pode assumir valores inteiros ou semi-inteiros, dependendo da representação.

4. Considere o conceito de spin em mecânica quântica:

- (a) Defina os operadores de spin \hat{S}_x , \hat{S}_y e \hat{S}_z e mostre que eles satisfazem a mesma álgebra de Lie que os geradores \hat{J}_i .
- (b) Explique a diferença entre momento angular orbital e spin, destacando as propriedades físicas e matemáticas de cada um.

- (c) Considere uma partícula com spin $1/2$. Mostre que os autoestados de \hat{S}_z podem ser escritos como $|+\rangle$ e $|-\rangle$, e encontre as matrizes de Pauli que representam os operadores de spin nessa base.
- (d) Considere uma direção arbitrária no espaço, dada pelo vetor unitário $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$. Encontre o espinor $|\psi\rangle$ que representa uma partícula com spin $+1/2$ na direção \mathbf{n} . Mostre que esse espinor pode ser escrito como (a menos de uma fase):

$$|\psi\rangle = e^{-i\phi/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle + e^{i\phi/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle.$$

Explique o significado físico dos ângulos θ e ϕ nessa expressão.