Universidade Estadual de Londrina

MECÂNICA QUÂNTICA II – PARTÍCULAS IDÊNTICAS E TRANSFORMAÇÕES

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

1. Considere um sistema de duas partículas idênticas e responda às questões abaixo:

   (a) Considere que o estado de uma partícula é descrito por $|a\rangle \in \mathbb{V}$. Utilize o produto tensorial para definir os dois possíveis espaços para os estados de duas partículas.

   (b) Definimos um estado separável de duas partículas como sendo da forma $|\psi\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$. Os estados que não podem ser escritos dessa forma são chamados emaranhados. Os estados representando duas partículas idênticas podem ser separáveis? Justifique sua resposta.

   (c) Com base nas respostas dos itens anteriores, explique como podemos realizar experimentos em laboratório medindo o estado de uma partícula $|a\rangle$ sem considerar todas as outras partículas idênticas presentes no sistema.

   (d) Explique como podemos testar empiricamente se o estado de duas partículas é simétrico ou anti-simétrico. Descreva como a simetria e a anti-simetria estão relacionadas ao conceito de troca de partículas idênticas e como as técnicas experimentais podem ser usadas para medir os estados de duas partículas e verificar sua simetria.

2. Considere um grupo aditivo de transformações a um parâmetro, que é um mapa suave $\mathbb{R} \to \mathrm{Op}(\mathbb{V})$ dado por $\mathrm{T}(\epsilon)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

   - $\mathrm{T}(\epsilon_2)\mathrm{T}(\epsilon_1) = \mathrm{T}(\epsilon_1 + \epsilon_2)$, onde $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}$;
   - $\mathrm{T}(0)$ é a identidade, ou seja, $\mathrm{T}(0) = \mathbb{1}$;
   - $\mathrm{T}^\dagger(\epsilon)\mathrm{T}(\epsilon) = \mathbb{1}$, onde $\mathrm{T}^\dagger$ é o adjunto de T.

   Responda as seguintes questões:

   (a) Mostre que $\mathrm{T}^\dagger(\epsilon) = \mathrm{T}(-\epsilon)$.

   (b) Explique o conceito de gerador e mostre que o operador gerador é anti-Hermitiano. Como podemos definir um operador que seja Hermitiano?

(c) Considere uma função dos operadores básicos $\widehat{X}$ e $\widehat{P}$, $\Omega(\widehat{X}, \widehat{P})$. Explique como podemos reescrever a operação $T^{\dagger}(\epsilon)\Omega(\widehat{X}, \widehat{P})T(\epsilon)$.

3. Considere o operador de inversão espacial Π, que inverte as coordenadas espaciais de um sistema. Prove que Π é um operador idempotente, ou seja, $\Pi^2 = \mathbb{1}$. Em termos de funções de onda, quais são as auto-funções do operador Π e seus autovalores correspondentes? Além disso, suponha que a Hamiltoniana do sistema é invariante sob inversão espacial, ou seja, $\Pi\widehat{H}\Pi = \widehat{H}$. Nesse caso, quais características da função de onda são conservadas? Explique.

4. Considere a álgebra dos geradores de rotação $\widehat{\mathbf{L}} \times \widehat{\mathbf{L}} = i\hbar\widehat{\mathbf{L}}$, e seja $\widehat{L}^2$ o operador momento angular total e $\widehat{L}_z$ o operador componente z do momento angular. Suponha que existem autoestados comuns $|\alpha\beta\rangle$ de $\widehat{L}^2$ e $\widehat{L}_z$, ou seja, $\widehat{L}^2 |\alpha\beta\rangle = \alpha |\alpha\beta\rangle$ e $\widehat{L}_z |\alpha\beta\rangle = \beta |\alpha\beta\rangle$. Responda às seguintes perguntas:

   (a) Explique por que podemos definir um autoestado simultâneo de $\widehat{L}^2$ e $\widehat{L}_z$.

   (b) Defina os operadores de escada $\widehat{L}_+$ e $\widehat{L}_-$ e calcule seus comutadores com $\widehat{L}_i$ e $\widehat{L}^2$.

   (c) Mostre como os operadores de escada atuam nos estados $|\alpha\beta\rangle$.

   (d) Se $\widehat{L}_i$ são auto-adjuntos, mostre que deve existir uma relação entre α e β. Qual é o significado físico dessa relação?