MECÂNICA QUÂNTICA II – PARTÍCULAS IDÊNTICAS E TRANSFORMAÇÕES

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

---

1. Considere um sistema de duas partículas **idênticas** e responda às questões abaixo:

   (a) Considere que o estado de uma partícula é descrito por $|a\rangle \in \mathbb{V}$. Utilize o produto tensorial para definir os dois possíveis espaços para os estados de duas partículas.

   (b) Definimos um estado separável de duas partículas como sendo da forma $|\psi\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$. Os estados que não podem ser escritos dessa forma são chamados emaranhados. Os estados representando duas partículas idênticas podem ser separáveis? Justifique sua resposta.

   (c) Com base nas respostas anteriores, explique como podemos realizar experimentos em laboratório para medir o estado de uma partícula $|a\rangle$ sem considerar todas as outras partículas idênticas presentes no sistema. Para tanto, considere dois estados $|\mathrm{T}\rangle$ e $|\mathrm{L}\rangle$ representando pacotes gaussianos na Terra e na Lua, respectivamente, onde

   $$\langle x|\mathrm{T}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{1/4}}\exp\left(-\frac{(x-\mu_\mathrm{T})^2}{4}\right), \qquad \langle x|\mathrm{L}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{1/4}}\exp\left(-\frac{(x-\mu_\mathrm{L})^2}{4}\right),$$

   com $\mu_\mathrm{L} \gg \mu_\mathrm{T}$. Demonstre que tanto o estado simétrico quanto o anti-simétrico de $|\mathrm{L}\rangle$ e $|\mathrm{T}\rangle$ são aproximadamente separáveis quando calculamos a função de onda do conjunto em $(x_\mathrm{L}, x_\mathrm{T})$ onde $|x_\mathrm{T} - \mu_\mathrm{L}| \gg 1$ e $|x_\mathrm{L} - \mu_\mathrm{T}| \gg 1$.

   (d) Explique como podemos testar empiricamente se o estado de duas partículas é simétrico ou anti-simétrico. Descreva como a simetria e a anti-simetria estão relacionadas ao conceito de troca de partículas idênticas e como as técnicas experimentais podem ser usadas para medir os estados de duas partículas e verificar sua simetria.

2. Considere um sistema uni-dimensional com uma partícula e respondas às questões abaixo:

   (a) Define o operador de translação $\hat{\mathrm{T}}_\epsilon$ que desloca a função de onda de uma partícula de uma distância ϵ. Use transformações ativas para definir o operador de translação.

(b) Mostre que o gerador do operador de translação é o operador momento linear $\hat{p}$.

(c) Discuta a liberdade de fase associada ao operador de translação e como ela está relacionada ao operador momento linear. Ou seja, se definimos $\hat{\mathrm{T}}_\epsilon |x\rangle = e^{i\epsilon g(x)/\hbar} |x + \epsilon\rangle$, como podemos escolher $g(x)$ de forma a garantir que $\hat{\mathrm{T}}_\epsilon^\dagger \hat{p} \hat{\mathrm{T}}_\epsilon = \hat{p}$?

3. Em um sistema tridimensional com uma partícula, responda às questões sobre as transformações discretas abaixo:

   (a) Defina o operador de reflexão $\hat{\mathrm{R}}_x$ que inverte a coordenada x. Use transformações ativas para definir o operador de reflexão.

   (b) O operador paridade $\hat{\mathrm{P}}$ inverte todas as coordenadas espaciais. Defina o operador paridade e mostre que ele é o produto de três operadores de reflexão. Mostre também que o operador de reflexão combinado com uma rotação de π em torno de um eixo perpendicular ao plano de reflexão é equivalente ao operador paridade.

   (c) Mostre que se a Hamiltoniana de um sistema é invariante sob rotações, então invariância sob reflexões implica invariância sob paridade.

   (d) Encontre os autovalores e autovetores do operador de paridade para o caso de uma partícula em uma dimensão. Mostre que os autovalores são ± 1 e que os autovetores são funções pares e ímpares.

4. Inversão temporal é uma transformação que inverte o tempo. Considere um sistema com uma partícula e responda às questões abaixo:

   (a) Defina o operador de inversão temporal $\hat{\mathrm{T}}$ que inverte o tempo. Usando a equação de Schrödinger para a função de onda de uma partícula, mostre que a inversão temporal requer que a função de onda seja transformada de acordo com $\psi(x,t) \to \hat{\mathrm{T}}\psi(x,t) = \psi^*(x,-t)$.

   (b) Usando o resultado acima, mostre que a inversão temporal transforma a Hamiltoniana na representação de posição de acordo com $\hat{\mathrm{T}}^\dagger \hat{\mathrm{H}} \hat{\mathrm{T}} = \hat{\mathrm{H}}^*$.

   (c) Mostre que a inversão temporal é uma transformação unitária e que $\hat{\mathrm{T}}^\dagger \hat{\mathrm{T}} = \hat{\mathrm{I}}$.