Universidade Estadual de Londrina

MECÂNICA QUÂNTICA I – POSTULADOS E PACOTE DE ONDAS

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

1. Um dos postulados fundamentais da mecânica quântica estabelece a comutação não nula entre os operadores posição ($\hat{x}$) e momento linear ($\hat{p}$), dada por

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar.$$

   (a) Na mecânica clássica, posição e momento desempenham papéis fundamentais como observáveis e geradores de transformações. Descreva sucintamente como essas grandezas se manifestam nesses contextos, destacando sua relevância no formalismo clássico.

   (b) Para compreender a origem desse postulado na mecânica clássica, é crucial analisar o papel desses operadores em termos de uma estrutura específica. Explique como o comutador de $\hat{x}$ e $\hat{p}$ está intrinsecamente ligado à estrutura clássica.

2. Dado um estado quântico $|\psi\rangle$ e dois observáveis $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ com autovetores dados respectivamente por $|a\rangle$ e $|b\rangle$:

   (a) Defina o que significa dizer que $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são observáveis compatíveis.

   (b) Se $[\widehat{A}, \widehat{B}] = 0$ e nenhum operador é degenerado, descreva em detalhes o que acontece com $|\psi\rangle$ ao fazermos medidas sequenciais de $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$.

   (c) Agora, considere o caso em que $\widehat{A}$ é degenerado. Explique como a degeneração afeta o procedimento de medidas sequenciais de $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ em $|\psi\rangle$.

3. Seja ρ a matriz densidade de um sistema quântico.

   (a) Escreva a expressão geral para ρ em termos dos estados puros $|\psi_i\rangle$ com probabilidades r_i tal que $\sum_i r_i = 1$.

   (b) Suponha que $r_1 \neq 0$ e $r_2 = 1 - r_1$, e que todos os outros estados puros têm probabilidade zero. Considere os estados puros dados por:

$$|\psi_1\rangle = \alpha_1|E_1\rangle + \beta_1|E_2\rangle, \tag{1}$$

$$|\psi_2\rangle = \alpha_2|E_1\rangle + \beta_2|E_2\rangle, \tag{2}$$

onde $|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 = 1$ e $|\alpha_2|^2 + |\beta_2|^2 = 1$. Calcule a probabilidade de encontrar o sistema no estado $|E_1\rangle$.

(c) Explique o significado da probabilidade obtida no item anterior.

4. Considere um pacote de onda Gaussiano livre dado por

$$\psi(x,0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right]$$

onde $\sigma > 0$ é o desvio padrão.

(a) Calcule a dispersão ($\Delta x \Delta p$) inicial do pacote de onda, onde Δx é o desvio padrão da posição e Δp é o desvio padrão do momento.

(b) Usando a representação do momento calcule a evolução temporal desse pacote.

(c) Calcule a dispersão ($\Delta x \Delta p$) para um instante t qualquer, discuta o resultado.