

RELATIVIDADE RESTRITA – LISTA DE EXERCÍCIOS:
DILATAÇÃO DO TEMPO, CONTRAÇÃO DO ESPAÇO, PARADOXO
DOS GÊMEOS E EFEITO DOPPLER

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

Em toda a lista abaixo usaremos assinaturas $(-, +, +, +)$ e as coordenadas em anos-luz.

1. Tempo próprio e dilatação temporal na métrica de Minkowski: Considere duas trajetórias (curvas tipo-tempo) em um espaço-tempo plano com coordenadas (ct, x^1, x^2, x^3) :

Trajatória 1 partícula em repouso no referencial inercial:

$$x^1(t) = x_0^1, \quad x^2 = x_0^2, \quad x^3 = x_0^3.$$

Trajatória 2 partícula em movimento uniforme na direção x^1 :

$$x^1(t) = x_0^1 + v(t - t_0), \quad x^2 = x_0^2, \quad x^3 = x_0^3.$$

- (a) Usando a métrica de Minkowski, calcule o tempo próprio $\Delta\tau$ medido ao longo de cada trajetória no intervalo entre t_0 e t_1 .
- (b) Compare os dois tempos próprios e interprete o resultado como uma dilatação temporal.
- (c) Mostre que o tempo próprio calculado ao longo da trajetória 2 é igual ao tempo coordenado medido em um referencial inercial no qual a partícula está em repouso. Esse resultado ilustra que o tempo coordenado de um referencial é, por definição, o tempo próprio das partículas em repouso nesse referencial.
- (d) Considere dois eventos A e B. No referencial inercial S, temos:

$$x_A^\mu = (x_A^0, x_A^1) = (4, 1), \quad x_B^\mu = (x_B^0, x_B^1) = (1, 5)$$

Determine a velocidade v de um referencial inercial S' em que os eventos A e B são simultâneos (i.e., ocorrem no mesmo instante em S').

2. Paradoxo dos gêmeos e estrutura do espaço-tempo: Considere o paradoxo dos gêmeos, com um dos gêmeos partindo da Terra (posição $x = 0$) em uma viagem até $x = 2$ com velocidade $v = \sqrt{3}/4$, retornando com velocidade $v = -\sqrt{3}/4$.
- Trace as linhas de simultaneidade nos referenciais inerciais da Terra e da nave durante os trechos de ida e de volta. Mostre que as linhas de simultaneidade da nave antes e depois da inversão se cruzam. Discuta a consequência disso para a contagem do tempo próprio e a interpretação dos eventos na perspectiva da nave.
 - A mudança de velocidade da nave implica uma descontinuidade nas linhas de simultaneidade. Como descrever essa situação usando um único sistema de coordenadas contínuo ao longo da trajetória da nave?
 - Analise como a mudança instantânea de velocidade afeta o tempo próprio acumulado pela nave. Como essa mudança pode ser interpretada geometricamente no diagrama de espaço-tempo? E como ela pode ser calculada?
 - Conceitualmente, por que não há simetria entre os dois gêmeos? Qual elemento físico rompe a equivalência entre os referenciais? Mostre como o uso de um único referencial inercial e o tempo próprio ajuda a resolver o aparente paradoxo.
3. Derivando o efeito Doppler relativístico: Considere dois observadores em movimento relativo com velocidade v ao longo do eixo x^1 .
- Defina o período de emissão de sinais do ponto de vista do emissor e do observador. Explique como esse período pode ser calculado no referencial de cada um, destacando a distinção entre tempo próprio e tempo coordenado.
 - Suponha que o emissor está em movimento com velocidade v e o observador está em repouso à direita. Calcule a frequência (própria) observada ν_o em função da frequência (própria) emitida ν_e , obtendo:

$$\nu_o = \nu_e \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

- Repita o cálculo no referencial em que o emissor está em repouso e o observador se move com velocidade $-v$. Mostre que o resultado obtido é o mesmo, reforçando a consistência do efeito Doppler relativístico sob transformações de Lorentz.

4. Vetores como derivadas direcionais:

- Mostre que a derivada direcional ao longo de um vetor v ,

$$\frac{\partial f}{\partial v} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon v) - f(x)}{\epsilon},$$

pode ser escrita na forma tensorial como:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = v^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}.$$

Assim, o vetor v pode ser representado por:

$$v \equiv v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

- (b) Dada uma transformação de coordenadas $y^\mu = \phi_y^\mu(x)$, com inversa $x^\mu = \phi_x^\mu(y)$, use a representação anterior para mostrar que as componentes transformadas do vetor satisfazem:

$$v'^\mu = \frac{\partial \phi_y^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu.$$

- (c) Seja $x^\mu(t)$ uma curva parametrizada por t em um espaço com coordenadas x^μ . Mostre que a variação infinitesimal de uma função escalar $f(x)$ ao longo da curva pode ser escrita como

$$df[x(t)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(t)}{dt} dt = \frac{df}{dv},$$

onde $v^\mu \equiv \frac{dx^\mu(t)}{dt}$ representa o vetor tangente à curva. Conclua que a quantidade $\frac{\partial f}{\partial x^\mu}$ define um objeto que age linearmente sobre vetores: um **covetor** (ou 1-forma).

- (d) Com base na expressão anterior, mostre que a ação de um covetor w_μ sobre um vetor v^μ pode ser escrita como:

$$w(v) = w_\mu dx^\mu(v) = w_\mu v^\mu.$$